

**ШАР З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ ПІД ДІЄЮ ДВОХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ШТАМПІВ**

В статті у рамках лінеаризованої теорії пружності, розглянуто змішану задачу про тиск пружних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження виконано в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. В статті розглядається контактна задача для двох співосьових циліндричних штампів з початковими (залишковими) напруженнями, які взаємодіють із шаром з початковими (залишковими) напруженнями. Сформульована загальна постановка задачі, одержано граничні умови. В кругових циліндричних координатах [3, 4] для циліндрів і шару приводяться розв'язки лінеаризованих рівнянь в загальному випадку для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури для теорії великих (кінечних) початкових (залишкових) деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій. Знайдено загальні розв'язки для циліндричних штампів і шару. Виписані значення деяких величин, які використовуються в дослідженнях для гармонічного потенціалу, лінійно-пружного тіла, потенціалів Бартенева – Хазановича і Трелоара.

**Постановка і граничні умови задачі**

Пружний необмежений шар з початковими (залишковими) напруженнями деформується під впливом тиску двох співвісних кругових штампів кінечної довжини і різних радіусів, в яких також присутні початкові (залишкові) напруження. Бокові поверхні пружних штампів, а також поверхні шару вільні від зовнішніх зусиль. В зоні контакту дотичними напруженнями нехтуємо.

Враховуючи, що пружні штампів і шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних матеріалів, для визначення складових вектора переміщень і тензора напружень в пружних штампів і шарі маємо такі граничні умови.

На торцях пружних штампів

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon_+; \quad \tilde{Q}_{r_3}^{(1)} = 0; \quad \forall(r) \in [0, R_1] \quad y_3 = h + H_1 \quad (1)$$

$$u_3^{(2)} = +\varepsilon_-; \quad \tilde{Q}_{r_3}^{(2)} = 0; \quad \forall(r) \in [0, R_2] \quad y_3 = -h - H_2 \quad (2)$$

На боковій поверхні пружних штампів

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{r_3}^{(1)} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0, H_1], \quad r = R_1, \quad (3)$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(2)} = 0; \quad \tilde{Q}_{r_3}^{(2)} = 0; \quad \forall(y_3) \in [0, H_2], \quad r = R_2, \quad (4)$$

На границі пружного шару  $y_3 = -h$

$$U_3^{(3)} = U_3^{(1)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(3)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(3)}, \quad \forall(r) \in [0, R_1], \quad y_3 = +h_1, \quad (5)$$

$$U_3^{(3)} = U_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(2)} = \tilde{Q}_{33}^{(3)}; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = \tilde{Q}_{3r}^{(3)}, \quad \forall(r) \in [0, R_2], \quad y_3 = -h_2 \quad (6)$$

На границі пружного шару поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{33}^{(3)} = \tilde{Q}_{3r}^{(3)} = 0 \quad \forall(r) \in [r, +\infty], \quad y_3 = \pm h \quad (7)$$

Розв'язок для шару вибираємо у вигляді [2, 2.162-2.165] для циліндрів з початковими (залишковими) напруженнями у вигляді [2, 4.90-4.94]

Для рівних коренів

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_2; \\ U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1} \varphi_2; \quad (8)$$

$$U_3 = m_1 n_1^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1 + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1^2} \varphi_2 \right) + (m_2 - 1) n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_2;$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{33} &= C_{44} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} [(1+m_1)l_1\varphi_1 + (1+m_2)l_2\varphi_2] + (1+m_1)l_1z_1 \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} \varphi_2 \right\}; \\ \tilde{Q}_{3r} &= C_{44} \left\{ n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} [(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + n_1^{-\frac{1}{2}} (1+m_1)z_1 \frac{\partial^3}{\partial r \partial z_1^2} \varphi_2 \right\}; \\ \tilde{Q}_{3\theta} &= C_{44} \left\{ n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1} [(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + n_1^{-\frac{1}{2}} (1+m_1)z_1 \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial z_1^2} \varphi_2 \right\}.\end{aligned}\quad (9)$$

Тут

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sin(\gamma_k, z_1) + D_k \cos(\gamma_k, z_1)) I_0(\gamma_k, r); \quad (10)$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (N_k sh(\alpha_n, z_1) + M_k ch(\alpha_n, z_1)) Y_0(\alpha_n, r).$$

Для нерівних коренів

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi_1 + \varphi_2); \quad (11)$$

$$U_3 = m_1 n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_1 + m_2 n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_2;$$

$$\tilde{Q}_{33} = C_{44} \left\{ (1+m_1)l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_1 + (1+m_2)l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \varphi_2 \right\};$$

$$\tilde{Q}_{3r} = C_{44} \left\{ n_1^{-\frac{1}{2}} (1+m_1) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_1 + n_2^{-\frac{1}{2}} (1+m_2) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_2} \varphi_2 \right\}; \quad (12)$$

$$\tilde{Q}_{3\theta} = C_{44} \left\{ n_1^{-\frac{1}{2}} (1+m_1) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1} \varphi_1 + n_1^{-\frac{1}{2}} (1+m_2) \frac{1}{r} z_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_2} \varphi_2 \right\}.$$

Тут

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \sin(\gamma_k, z_1) + D_k \cos(\gamma_k, z_1)) I_0(\gamma_k, r); \quad (13)$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (N_k sh(\alpha_n, z_2) + M_k ch(\alpha_n, z_2)) Y_0(\alpha_n, r).$$

Задоволення граничних умов приводить до розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$\theta_1(r) - \frac{2}{\pi} \int_0^{R_1} \theta_1(t) R(r, t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{R_2} \theta_2(t) H(r, t) dt = -\frac{2\varepsilon_1 \omega_2 \chi}{\pi}, \quad (14)$$

$$\theta_2(r) - \frac{2}{\pi} \int_0^{R_1} \theta_2(t) R(r, t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{R_1} \theta_1(t) H(r, t) dt = \frac{2\varepsilon_2 \omega_2 \chi}{\omega},$$

де  $R(r, t)$  і  $H(r, t)$  – симетричні ядра,

$$R(r, t) = \int_0^{\infty} [z_2(x) - z_1(x)] \cos tx \cos rxdx, \quad (15)$$

$$H(r, t) = \int_0^{\infty} z_2(x) \cos tx \cos rxdx.$$

Для побудови наближеного розв'язку  $\theta_1$  і  $\theta_2$  виражаємо у вигляді розкладу за поліномами Чебишева до степені  $2N - 2$

$$\theta_i(r) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(i)} T_{2n}(r) \cdot \omega_i(r), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

де  $\omega_i(r)$  - вагові функції, які залежать від форми основи штампів.

Систему розв'язуємо методом коллокації, задовольняючи інтегральні рівняння в  $N$  заданих точках  $0 \leq r_j^{(i)} \leq R_i, j = 1, \dots, N$ . Одержані системи можна записати у вигляді

$$A_{ij}^{(1)} f_i^{(1)} + B_{ij}^{(2)} f_i^{(2)} = g^{(1)}, \quad A_{ij}^{(2)} f_i^{(2)} + B_{ij}^{(1)} f_i^{(1)} = g^{(2)}, \quad (17)$$

де  $g^{(i)} = \frac{2\omega_2 \chi}{\pi} \varepsilon_i, A_{ij}^{(R)}, B_{ij}^{(R)}, R = 1, 2, -$  відомі коефіцієнти.

Із аналізу розв'язку поставленої задачі випливає, що наявність початкових напружень у пружному шарі призводить до істотних змін закону розподілу контактних зусиль, при цьому у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) контактні напруження істотно зменшуються, а у випадку розтягу ( $\lambda_1 > 1$ ) – збільшуються, а переміщення у випадку стиску ( $\lambda_1 < 1$ ) значно зростають, при стиску ( $\lambda_1 > 1$ ) – зменшуються.

Товщина шару не впливає на характер початкових напружень. Вплив початкових напружень позначається тільки на їх величині і залежить від співвідношень радіусів штампів.

Більш істотний вплив кількісного характеру початкові напруження надають у високо еластичних матеріалах порівняно з жорсткими матеріалами, якісний вплив має ідентичний характер.

#### Список використаних джерел

1. Григоренко П. П., Рудницький В. Б. Шар з початковими напруженнями під дією двох жорстких штампів. // Доп. АН УРСР., сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1990, № 9. – С. 35 – 37.
2. Гузь А. Н. Механика хрупкого розрушення матеріалів с начальними напряжениями. – Киев: Наук.думка, 1983. – 286 с.
3. Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A.A., 2004. – 682 p.
4. Guz A. N., Rudnitsky V. B. Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses. Khmelnytsky: Publish Private Entrepreneur Melnyk A. A., 2004. – 682 p.